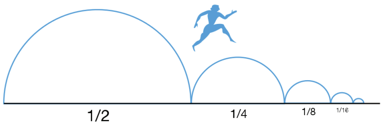
Continuité et applications

Objectifs :

- Comprendre intuitivement la notion de continuité
- Savoir exploiter le théorème des valeurs intermédiaires

Aperçu historique :

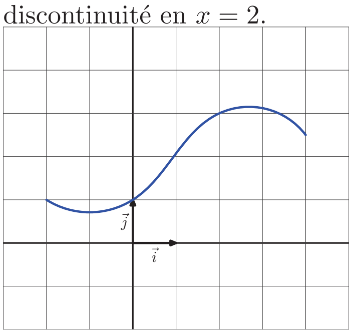
L'un des paradoxes de Zénon d'Elée *(v° s. av. JC)fait appel à la notion de continuité : c'est le paradoxe de la dichotomie ("couper en deux") :*
Zénon se tient à huit mètres d'un arbre, tenant une pierre. Il lance sa pierre dans la direction de l'arbre. Avant que le caillou puisse atteindre l'arbre, il doit traverser la première moitié des huit mètres. Il faut un certain temps, non nul, à cette pierre pour se déplacer sur cette distance. Ensuite, il lui reste encore quatre mètres à parcourir, dont elle accomplit d'abord la moitié, deux mètres, ce qui lui prend un certain temps. Puis la pierre avance d'un mètre de plus, progresse après d'un demi-mètre et encore d'un quart, et ainsi de suite ad infinitum et à chaque fois avec un temps non nul. Zénon en conclut que la pierre ne pourra pas frapper l'arbre, puisqu'il faudrait pour cela que soit franchie effectivement une série infinie d'étapes, ce qui est impossible. Le paradoxe se résout en soutenant que le mouvement est continu ; le fait qu'il soit divisible à l'infini ne le rend pas impossible pour autant.

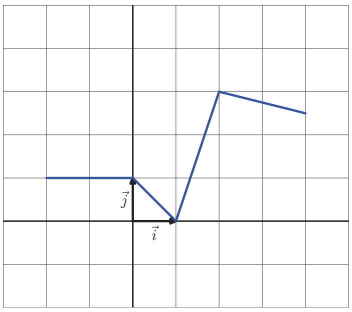


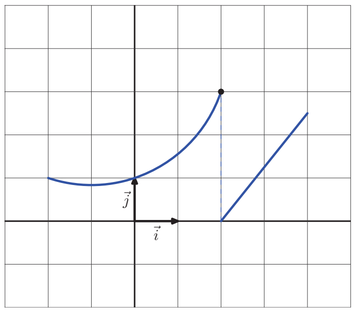
1. Continuité

A. Approche graphique de la continuité

En observant les trois courbes ci-dessous, on remarque que les deux premières peuvent être tracées « sans lever le crayon » alors que la troisième admet un « saut » à l'abscisse 2. Les deux premières représentent des fonctions dites <u>continues</u> sur l'intervalle $[-2; 4]$ alors que la troisième représente une fonction qui admet une discontinuité en $x = 2$.







B. Approche intuitive de la continuité

Définition 6.1 Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace « d'un trait continu », sans lever le crayon.
La continuité d'une fonction f en un point a d'un intervalle I se traduit mathématiquement par le fait que la limite à droite de f en a soit égale à sa limite à gauche et soit égale à $f(a)$:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$$

Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

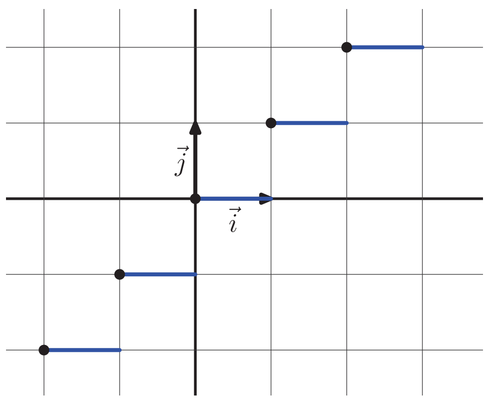
C. Partie entière

Un nombre réel est composé d'une partie entière finie (avant la virgule) et d'une partie décimale (après la virgule). La partie entière de $4,65$ est 4. On remarque également que tout nombre réel x appartient à un intervalle du type $[n; n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 6.2 La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ notée $E(x)$ est définie ainsi :

$$\text{si } x \in [n; n+1[\quad (n \in \mathbb{Z}), \text{ alors } E(x) = n$$

Exemple 6.1 Ainsi, $E(3,14) = 3$ car $3,14 \in [3;4[$. Et $E(-4,32) = -5$ car $-4,32 \in [-5;-4[$. La représentation graphique de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$, pour $x \in [-2;3[$ est tracée ci-contre. Elle est continue sur chaque intervalle $]n\,;\,n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$ et discontinue en chaque $x_0 \in \mathbb{Z}$.



D. Propriétés

Théorème 6.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration Soit a un réel de I tel que f est dérivable en a c'est-à-dire que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
Pour tout $x \neq a$ on pose $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On sait que f est dérivable en a donc $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a)$. Pour $x \neq a$ on a $f(x) - f(a) = g(x)(x-a)$ et donc $f(x) = f(a) + g(x)(x-a)$. De plus :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} g(x) = f'(a) \\ \lim_{x \to a} (x-a) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to a} g(x)(x-a) = 0$$

Et donc finalement :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + \lim_{x \to a} g(x)(x-a) = f(a)$$

Ainsi, f est continue en a. On a choisi a quelconque dans I donc f est continue sur I.

Théorème 6.2 (Conséquence) Une fonction obtenue par opérations [a] sur les fonctions usuelles est continue sur chaque intervalle où elle est définie.
Ainsi, les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques et définies par des racines carrées sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

a. somme, différence, produit, quotient, composition...

Démonstration Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition (sauf pour la fonction racine carrée en 0) elles sont donc continues sur leur ensemble de définition.
On montre à l'aide de la définition d'une limite la continuité de la fonction racine carrée en 0.

Remarque 6.1 (Attention !) La réciproque du théorème 6.1 est fausse. Par exemple la fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0. C'est aussi le cas de la fonction valeur absolue en 0 [1].

2. Valeurs intermédiaires

A. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 6.3 (des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = m$.
On dira que *l'image continue d'un intervalle est un intervalle*.

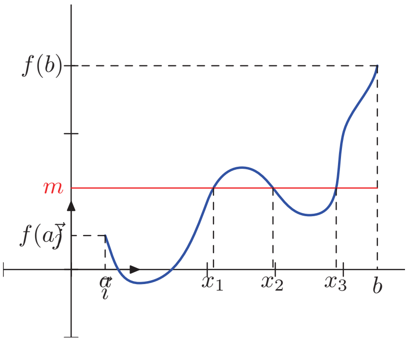


Figure 1

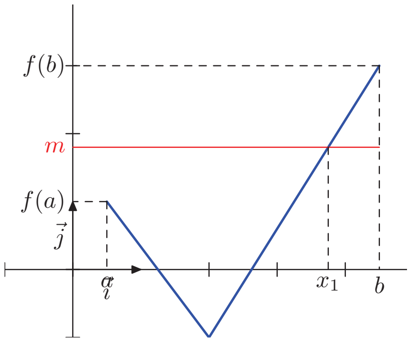


Figure 2

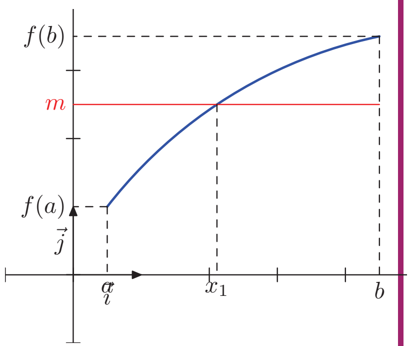


Figure 3

Remarque 6.2 Si la fonction f est continue mais non strictement monotone sur $[a\,;\,b]$, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution pour toute valeur de m comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, mais elle n'est pas nécessairement unique (voir figure 1 ci-dessus : l'équation a trois solutions).

B. Le cas des fonctions monotones

Théorème 6.4 (Corollaire dans le cas monotone) Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$, alors [a] :

- $f\left([a\,;\,b]\right) = [f(a)\,;\,f(b)]$ (si f est croissante) ou $[f(b)\,;\,f(a)]$ (sinon) ;
- pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = m$ admet **une et une seule** solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

a. f est **bijective** ("correspondance un à un entre les images et les antécédents", donc la valeur m a un antécédent *unique*

Démonstration On suppose la fonction f strictement croissante sur $I = [a;b]$, ainsi $f(a) < f(b)$ (si $a \neq b$).
Montrons que $f(I) = [f(a)\,;\,f(b)]$ ($f(I)$ est l'ensemble des $f(x)$ avec $x \in [a\,;\,b]$) :
Pour tout réel x dans I on a $a \leq x \leq b$ et f croissante donc $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$; donc $f(x) \in [f(a)\,;\,f(b)]$.
Réciproquement, soit $y \in [f(a)\,;\,f(b)]$, d'après le théorème 6.3, il existe au moins un $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = y$; donc $y \in f(I)$.
Finalement on a montré que $f(I) \subset [f(a)\,;\,f(b)]$ et $[f(b)\,;\,f(a)] \subset f(I)$. Donc $f(I) = [f(a)\,;\,f(b)]$.
Enfin, f étant strictement croissante, deux nombres distincts ont des images distinctes donc l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur I.

Remarque 6.3 Quand on est dans la situation du théorème 6.4, on dit que f réalise une bijection de $[a\,;\,b]$ sur $f([a\,;\,b])$.

Remarque 6.4 Par convention, dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent :

1. Il existe même des fonctions continues sur un intervalle et nulle-part dérivable sur cet intervalle, mais là ça dépasse un peu le programme de TS... Un exemple d'une telle fonction est la fonction de WEIERSTRASS définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ avec $0 < a < 1$ et $ab > 1$.

- la continuité de la fonction sur l'intervalle considéré ;
- la stricte monotonie de la fonction sur cet intervalle.

Exemple 6.2 Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,9]$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2$. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $[0\,;\,9]$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,9]$ car la fonction racine carrée l'est. Par ailleurs, f est une fonction continue sur $[0\,;\,9]$. De plus $f(0) = 2$ et $f(9) = 5$.
Ainsi, $3 \in [f(0)\,;\,f(9)]$, donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 3$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0\,;\,9]$.

Exemple 6.3 Soit f une fonction définie sur $[0\,;\,7]$ dont on donne le tableau de variation. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

x	0		2		4		7
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Réponse :
- D'après le tableau de variation de f, sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $\sqrt{2} \in [f(4)\,;\,f(0)]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution dans $[0\,;\,4]$.
- D'après le tableau de variation de f, sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\sqrt{2} \in [f(4)\,;\,f(7)]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution dans $[4\,;\,7]$.

Finalement l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions dans $[0\,;\,7]$. On pourrait même montrer que la solution la plus petite est dans $[0\,;\,2]$, et l'autre dans $[4\,;\,7]$.

C. Complément du théorème de la valeur intermédiaire

Le théorème 6.4 de la valeur intermédiaire peut s'étendre à une fonction continue strictement monotone sur un intervalle ouvert même non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle.

Exemple 6.4 Soit f une fonction dont on donne le tableau des variations ci-après. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4

Réponse :
- sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, d'après les variations, $f(x) \leq -1$ donc l'équation n'a pas de solution ;
- sur $]1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et on a :

$$\lim_{x\to 1; x>1} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

  Enfin, $0 \in]-\infty\,;\,4[$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1\,;\,+\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

D. Application : recherche de solution approchée par dichotomie

Dichotomie vient du grec et signifie « couper en deux ».

Objectif : trouver une valeur approchée de $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ avec f continue et strictement croissante sur $[a; b]$ où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
On pose $c = \frac{a+b}{2}$. Si $f(c) < 0$ la solution sera dans $[c; b]$ sinon elle sera dans $[b; c]$.
Et on recommence en posant $d = \frac{c+b}{2}$ (ou $\frac{a+c}{2}$ suivant le cas de l'étape précédente).
On étudie le signe de $f(d)$ ….

Remarque 6.5 Cette méthode permet d'obtenir un encadrement de la solution de plus en plus précis (on divise par deux l'amplitude de cet encadrement à chaque étape), en ne faisant qu'un seul nouveau calcul à chaque étape.

Entrées : l'expression $f(x)$;
un entier a tel que $f(a)$ et $f(a+1)$ soient de signes contraires;
le nombre n de chiffres après la virgule souhaités pour la solution approchée;
début
  $b \leftarrow (a+1)$;
tant que $b - a < 10^{-n}$ **faire**
  si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe **alors**
    $a \leftarrow \frac{a+b}{2}$;
  sinon
    $b \leftarrow \frac{a+b}{2}$;
Résultat : la solution cherchée est dans $[a; b]$

Algorithme 3 : Résolution approchée par dichotomie de l'équation $f(x) = 0$

3. Application aux suites : un théorème du point fixe

On a admis au chapitre 5 le théorème 5.2 suivant :
Soit u une suite numérique de limite α et soit f une fonction numérique telle que $f(u_n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =: \ell$. Alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

La notion de continuité nous permet d'établir un théorème dit "du point fixe" (il en existe d'autres, que vous découvrirez après le Bac), très utile pour trouver un ou plusieurs "candidat(s) limite" pour une suite :

Propriété 6.1 Si la suite (u_n) converge vers ℓ et si la fonction f est continue en ℓ, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Théorème 6.5 Soient f une fonction numérique et (u_n) une suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers une limite ℓ et si f est continue en ℓ, alors la limite ℓ vérifie la relation :

$$f(\ell) = \ell$$

Attention !!! Ce théorème ne donne pas la convergence de la suite !!!

Méthode On montre d'abord que (u_n) converge, par exemple parce qu'elle est croissante et majorée, ou décroissante et minorée, puis que f est continue. Ensuite on résout l'équation $f(\ell) = \ell$, qui nous donne un ou plusieurs "candidats" pour la limite ℓ de (u_n). Graphiquement, résoudre cette équation revient à chercher les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la 1^{re} diagonale (droite d'équation $y = x$).
Pour démontrer que ce candidat est (ou n'est pas) la limite de (u_n), on étudie la limite de $u_n - \ell$ lorsque $n \to +\infty$, en essayant de montrer que c'est 0.

Démonstration On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
De plus, f est continue en ℓ donc, par définition de la continuité et d'après le th. 5.2, $\lim\limits_{u_n \to \ell} f(u_n) = f(\ell)$, i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$, ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = f(\ell)$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, donc $f(\ell) = \ell$.